关于高阶 Euler 数的同余°

罗　辉, 刘国栋

(惠州学院数学系, 广东惠州　516015)

摘　要: 给出了高阶 Euler 数的一些同余式

关 键 词: Euler 数; 高阶 Euler 数; 同余

中图分类号: O 156, O 157　**文献标识码**: A　**文章编号**: 1008-5513(2005)04-0345-04

1　引　言

k 阶 Euler 数 $E_n^{(k)}$ $(n = 0, 1, 2, \cdots, k = 1, 2, \cdots)$ 由下列展开式给出(见文[1])

$$\left(\frac{2e^t}{e^{2t}+1}\right)^k = \sum_{n=0}^{\infty} E_n^{(k)} \frac{t^n}{n!}, \quad |t| < \frac{\pi}{2} \tag{1}$$

由(1), 我们有 $E_0^{(k)} = 1, E_{2s+1}^{(k)} = 0 (s = 0, 1, 2, \cdots)$, 对一般的高阶 Euler 数 $E_{2n}^{(k)}$ $(n \geq 1)$ 有下列计算公式:

$$E_{2n}^{(k)} = \frac{(2n)!}{(k-1)!} = \sum_{v_1+2v_2+\cdots+nv_n=n} \frac{(-1)^{v_1+v_2+\cdots+v_n}(v_1+v_2+\cdots+v_n+k-1)!}{v_1!v_2!\cdots+v_n!(2!)^{v_1}(4!)^{v_2}\cdots((2n)!)^{v_n}} \tag{2}$$

这里 $v_1 + 2v_2 + \cdots + nv_n = n$ 表示对所有满足该式的 n 维非负整数组 $(v_1, v_2, \cdots, v_n)$ 求和

由(2) 我们有

$$E_2^{(k)} = -k, E_4^{(k)} = 3k^2 + 2k, E_6^{(k)} = -15k^3 - 30k^2 - 16k$$

$$E_8^{(k)} = 105k^4 + 420k^3 + 588k^2 + 272k\cdots$$

Euler 数是从许多组合问题中提出来的, 它在数论和组合数学中有着广泛的应用 研究 Euler 数的同余问题是刻画 Euler 数性质的有效方法, 这也是近年来许多学者感兴趣的研究课题, 例如, 文[2], 研究了一阶 Euler 数的同余, 得到了下列有趣的同余式

$$E_{p-1}^{(1)} \equiv \begin{cases} 0 \pmod{p}, & p \equiv 1 \pmod{4} \\ 2 \pmod{p}, & p \equiv 3 \pmod{4} \end{cases} \tag{3}$$

这里 p 是任意奇质数

文[1], 研究了二阶 Euler 数的同余, 得到了下列同余式

$$E_{p-1}^{(2)} \equiv 1 \pmod{p} \tag{4}$$

° **收稿日期**: 2004-10-22
基金项目: 广东省自然科学基金资助项目(021072), 惠州学院科研基金资助项目
作者简介: 罗辉(1964-), 讲师, 研究方向: 数论

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

这里 p 是任意奇质数

文[3], 在问题B45 中对一阶 Euler 数提出如下两个猜想:

(Ⅰ) 对任何质数 $p \equiv 1 \pmod 8$, $E_{(p-1)/2} \neq 0 \pmod p$ 是否为真?

(Ⅱ) 对任何质数 $p \equiv 5 \pmod 8$, $E_{(p-1)/2} \neq 0 \pmod p$ 是否为真?

文[4], 对上述猜想(Ⅱ) 给出了肯定的回答, 并对猜想(Ⅰ) 进行了转化, 即

对任何质数 $p \equiv 1 \pmod 8$, $E_{(p-1)/2} \neq 0 \pmod p$ 等价于 $1, 2, \cdots, \frac{p-1}{4}$ 中二次剩余与二次非剩余的个数不相同

在本文中我们将进一步研究高阶 Euler 数的同余问题, 即要证明下列结果:

定理 1 设 p 是奇质数, $k \geq 1$ 是整数, 则

$$E_{p+1}^{(k)} \equiv -k \pmod p \tag{5}$$

定理 2 设 $n \geq 1, k \geq 1$ 是整数, 则

$$E_{2n}^{(k)} \equiv -k \pmod{k(k+1)} \tag{6}$$

定理 3 设 p 是奇质数, $k \geq 1$ 是整数, 且 $p > 2k$, 则

(i) $$E_{p-1}^{(2k)} \equiv 1 \pmod p; \tag{7}$$

(ii) $$E_{p-1}^{(2k+1)} \equiv \begin{cases} 1 - \dfrac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \pmod p, & p \equiv 1 \pmod 4 \\ 1 + \dfrac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \pmod p, & p \equiv 3 \pmod 4 \end{cases} \tag{8}$$

这里 $(2k-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)$, $(2k)!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2k)$.

2 定义和引理

定义 1 k 阶 Euler 多项式 $E_n^{(k)}(x)$ $(n = 0, 1, 2, \cdots, k = 1, 2\cdots)$ 由下列展开式给出(见文[1]、[5])

$$\left(\frac{2}{e^t + 1}\right)^k e^{xt} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n^{(k)}(x) \frac{t^n}{n!}, \quad |t| < \pi \tag{9}$$

由(1) 和(9), 我们有 $E_n^{(k)} = 2^n E_n^{(k)}\left(\frac{k}{2}\right)$.

引理 1[1]、[5]

$$E_n^{(k+1)}(x) = 2\left(1 - \frac{x}{k}\right) E_n^{(k)}(x) + \frac{2}{k} E_{n+1}^{(k)}(x) \tag{10}$$

引理 2 (i) $$\sum_{j=0}^{n} \binom{2n}{2j} E_{2j}^{(k+1)} = E_{2n}^{(k)} \tag{11}$$

(ii) $$\sum_{j=0}^{n-1} \binom{2n-1}{2j} E_{2j}^{(k+1)} = -\frac{1}{k} E_{2n}^{(k)} \tag{12}$$

证明 一方面, 由引理 1 有

$$2^n E_n^{(k+1)}\left(\frac{k}{2}\right) = 2^n E_n^{(k)}\left(\frac{k}{2}\right) + \frac{2^{n+1}}{k} E_{n+1}^{(k)}\left(\frac{k}{2}\right) = E_n^{(k)} + \frac{1}{k} E_{n+1}^{(k)} \tag{13}$$

另一方面, 由(1) 和(9) 有

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n E_n^{(k+1)}\left(\frac{k}{2}\right)\frac{t^n}{n!} = \left(\frac{2}{e^{2t}+1}\right)^{k+1} e^{kt} = \left(\frac{2e^t}{e^{2t}+1}\right)^{k+1} e^{-t}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} E_n^{(k+1)}\frac{t^n}{n!}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-j}\binom{n}{j}E_j^{(k+1)}\frac{t^n}{n!}$$

所以

$$2^n E_n^{(k+1)}\left(\frac{k}{2}\right) = \sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-j}\binom{n}{j}E_j^{(k+1)} \tag{14}$$

比较(13) 和(14), 有

$$\sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-j}\binom{n}{j}E_j^{(k+1)} = E_n^{(k)} + \frac{1}{k}E_{n+1}^{(k)} \tag{15}$$

由(15) 并注意到 $E_{2s+1}^{(k)} = 0\,(s \geq 0)$, 我们立即可得到(11) 和(12).

引理 3　设 $n \geq 0, k \geq 3$ 是整数, 则

$$E_{2n}^{(k)} = \frac{k-2}{k-1}E_{2n}^{(k-2)} - \frac{1}{(k-1)(k-2)}E_{2n+2}^{(k-2)} \tag{16}$$

3　定理的证明

定理 1 的证明　在引理 2 中, 令 $2n = p + 1$, 得 $\sum_{j=0}^{\frac{p-1}{2}}\binom{p}{2j}E_{2j}^{(k+1)} = -\frac{1}{k}E_{p+1}^{(k)}$. 所以

$$E_{p+1}^{(k)} = -k\sum_{j=0}^{\frac{p-1}{2}}\binom{p}{2j}E_{2j}^{(k+1)} = -k - k\sum_{j=1}^{\frac{p-1}{2}}\binom{p}{2j}E_{2j}^{(k+1)} \tag{17}$$

由(17) 并注意到当 $1 \leq j \leq \frac{p-1}{2}$ 时, $\binom{p}{2j} \equiv 0 \pmod{p}$, 我们立即得到定理 1.

定理 2 的证明　当 $n \geq 1$ 时, 由引理 2 有

$$E_{2n}^{(k)} = -k\sum_{j=0}^{n-1}\binom{2n-1}{2j}E_{2j}^{(k+1)} \equiv 0 \pmod{k} \tag{18}$$

由引理 2 和(18), 我们有

$$E_{2n}^{(k)} = \sum_{j=0}^{n}\binom{2n}{2j}E_{2j}^{(k+1)} = 1 + \sum_{j=1}^{n}\binom{2n}{2j}E_{2j}^{(k+1)} \equiv 1 \pmod{k+1} \tag{19}$$

由(18) 和(19), 有 $E_{2n}^{(k)} \equiv -k \pmod{k}$, $E_{2n}^{(k)} \equiv -k \pmod{k+1}$, 再注意到$(k, k+1) = 1$, 即得定理 2

定理 3 的证明　(i) 由引理 3, 有

$$E_{p-1}^{(2k)} = \frac{2k-2}{2k-1}E_{p-1}^{(2k-2)} - \frac{1}{(2k-1)(2k-2)}E_{p+1}^{(2k-2)} \tag{20}$$

由(20) 和定理 1, 有

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$E_{p-1}^{(2k)} \equiv \frac{2k-2}{2k-1} E_{p-1}^{(2k-2)} + \frac{1}{2k-1} \pmod{p} \tag{21}$$

所以

$$E_{p-1}^{(2k)} \equiv \frac{(2k-2)!!}{(2k-1)!!} E_{p-1}^{(2)} + 1 - \frac{(2k-2)!!}{(2k-1)!!} \pmod{p} \tag{22}$$

由(22) 和(4), 即可得到(7).

(ii) 由引理 3, 有

$$E_{p-1}^{(2k+1)} = \frac{2k-1}{2k} E_{p-1}^{(2k-1)} - \frac{1}{2k(2k-1)} E_{p+1}^{(2k-1)} \tag{23}$$

由(23) 和定理 1, 有

$$E_{p-1}^{(2k+1)} \equiv \frac{2k-1}{2k} E_{p-1}^{(2k-1)} + \frac{1}{2k} \pmod{p} \tag{24}$$

所以

$$E_{p-1}^{(2k+1)} \equiv \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} E_{p-1}^{(1)} + 1 - \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \pmod{p} \tag{25}$$

由(25) 和(3), 即可得到(8).

参 考 文 献

[1] 刘国栋. 广义中心阶乘数与高阶 Nörlund Euler-Bernoulli 多项式[J]. 数学学报, 2001, 44(5): 933~946.

[2] Zhang Wenpeng. Some Identities Involving the Euler and the Central Factorial Numbers [J]. The Fibonacci Quarterly, 1998, 36(2): 154~157.

[3] R. K. 盖伊, 张明尧译. 数论中未解决的问题(第二版) [M]. 北京: 科学出版社, 2003.

[4] 刘国栋. 关于 Euler 数的一个问题的解决[J]. 数学学报, 2004, 47(4): 825~828.

[5] Nörlund N E. Differenzenrechnung[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1924.

Congruences for higher order Euler numbers

LUO Hui, LIU Guo-dong

(Department of Mathematics, Huizhou University, Huizhou, Guangdong 516015, China)

Abstract: In this paper, some congruences formulas for higher order Euler numbers are given.

Key words: Euler numbers, higher order Euler numbers, congruences

2000 MSC: 11B68

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net